

Technische Mechanik II

Prof. Dr.-Ing. Torsten Finke

Hessische BA

23. Januar 2012(Rev.: ce9693c34186)

Überblick

Ankündigungen

Literatur

Reibung

Elastostatik

Dynamik

Inhalte

Script: <http://www.dr-torsten-finke.de/lehre/tm2>

- ▶ Einstieg/Übersicht
- ▶ Inhalte:
 - ▶ Reibung
 - ▶ Elastostatik
 - ▶ Starre Körper
 - ▶ Schwingungen
- ▶ Methode:
 - ▶ Vorlesung
 - ▶ Übung
 - ▶ **Hausaufgaben!**

Klausur

- ▶ Inhalte der Veranstaltung komplett relevant
- ▶ keine Hilfsmittel
- ▶ Auswahlklausur
- ▶ Formvorschriften

Lob und Tadel

- ▶ Kritik, Anmerkungen, Fragen: am besten sofort, konkret, direkt!
- ▶ Evaluation – Sinn und Nutzen

Literatur

- Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik – Teil 1: Statik
 Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik – Teil 2: Elastostatik
 Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik – Teil 3: Kinetik

Reibungskraft

- ▶ trockene Reibung
- ▶ Einflussgrößen
- ▶ Normalkraft \leftrightarrow Reibungskraft
- ▶ Kraftrichtung
- ▶ Haft-/Gleitreibung
- ▶ Reibungsbeiwert μ
- ▶ Coulomb'sche Reibung $R = \mu N$
- ▶ Reibungskegel $\tan \varphi = \mu$
- ▶ Wirkung und Verwendung

Reibungsbeiwerte

Material-paarung	Haft-reibung	Gleit-reibung
Stahl/Stahl	0,15–0,5	0,1–0,4
Stahl/Teflon	0,04	0,04
Stahl/Holz	0,5	0,4
Stahl/Glas	0,6	0,5
Stahl/Stein	0,45	0,4
Holz/Holz	0,55	0,35
Gummi/Asphalt	0,7–0,9	0,6–0,8

Seilreibung

- ▶ Grenzreibung
- ▶ Kräftebilanz am kleinen Umschlingungswinkel $d\varphi$
 - ▶ Seilkraft S
 - ▶ Reibkraft R
 - ▶ Normalkraft N

$$\begin{aligned} dS \cos \frac{d\varphi}{2} &= dR \\ 2S \sin \frac{d\varphi}{2} &= dN \\ dR &= \mu_0 dN \end{aligned}$$

Seilreibungskraft

- ▶ Kleinwinkelnäherung

$$\begin{aligned} \cos \frac{d\varphi}{2} &\approx 1 \\ \sin \frac{d\varphi}{2} &\approx \frac{d\varphi}{2} \end{aligned}$$

- ▶ Trennung der Variablen

$$\mu d\varphi = \frac{dS}{S}$$

- ▶ Seilreibungskraft

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\varphi}$$

Rollreibung

- ▶ Verformung Wälzkörper/Auflage
- ▶ Wirkmechanismen:
 - ▶ Hysterese
 - ▶ Schlupf im Latsch
- ▶ Rollreibungskoeffizienten μ_r

Bauteil- paarung	Roll- reibung
Kugel/Lager	0,0005–0,001
Stahlrad/Schiene	0,001–0,002
Reifen/Asphalt	0,01–0,02
Reifen/Sand	0,2–0,4

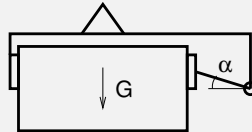
Reibung – Übungen

Anmerkung: Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

1. Ein Zylinder aus Stahl (Dichte $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, Durchmesser $D = 100 \text{ mm}$, Höhe $H = 450 \text{ mm}$) steht auf einer waagerechten hölzernen Tischplatte.
 - a) Welche seitliche Kraft F ist erforderlich, um den Zylinder zu verschieben?
 - b) Auf welcher Höhe h über der Tischplatte darf diese seitliche Kraft höchstens angreifen, wenn der Zylinder nicht umkippen soll?
2. Eine Stahlkiste (Masse $m = 100 \text{ kg}$) wird in $h = 2 \text{ m}$ Höhe auf einer Holzplanke abgelegt, die um den Winkel $\alpha = 25^\circ$ gegen die Waagerechte geneigt ist.
 - a) Wie groß ist, falls erforderlich, eine Anschubkraft, um die Kiste ins Rutschen zu bringen?
 - b) Welche Geschwindigkeit erreicht die Kiste bis zum Ende der Planke? Wie lange dauert das Rutschen?
 - c) Nach Verlassen der Planke rutscht die Kiste über einen waagerechten Boden aus Stein. Nach welcher Zeit kommt sie zum Stehen? Welchen Weg legt sie in dieser Zeit zurück?

Reibung – Übungen

3. Ein Klemmgreifer aus Stahl soll ein stählernes Werkstück mit der Gewichtskraft $G = 1000 \text{ N}$ heben. Der Haftreibungskoeffizient betrage $\mu_0 = 0,3$.
- Unter welchem Winkel α darf die gelenkige Klinke höchstens angebracht sein, damit das Werkstück klemmt?
 - Welche Kraft F tritt im Rahmen des Klemmgreifers auf?
 - Welche Auswirkung hat die Halbierung des Klinkenwinkels α ?



Reibung – Übungen

4. Eine Stahlbramme (Masse $m = 50 \text{ t}$) wird auf einem waagerechten Walzenbett abgelegt. Die parallel liegenden Walzen (Durchmesser $D = 100 \text{ mm}$) rotieren mit der Drehzahl $n = 180 \text{ 1/min}$. Der Gleitreibungskoeffizient betrage $\mu = 0,1$
- Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Bramme?
 - Wann erreicht die Bramme ihre Endgeschwindigkeit?
 - Welche Antriebsleistung benötigen die fördernden Walzen?
5. Ein Auto befährt einen Hang mit einer Neigung von 8% hinauf beziehungsweise hinab. Der Haft-, beziehungsweise Gleitreibungskoeffizient betrage $\mu_0 = 0,8$, $\mu = 0,7$.
- Welche maximale Beschleunigung erreicht das Fahrzeug gegenüber der Fahrbahn (vorausgesetzt, dass genügend Antriebsleistung vorhanden ist)?
 - Wie lang ist der Bremsweg bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v = 130 \text{ km/h}$, wenn die Reifen blockieren?
 - Wie groß sind Beschleunigung und Bremsweg bei Fahrt in der Ebene?

Reibung – Übungen

6. Ein Güterzug von 60 Waggons (Masse je $m = 40 \text{ t}$) wird von einer Lokomotive (Masse $M = 100 \text{ t}$) gezogen. Zum Zusammenstellen des Güterzuges werden die Waggons auf einen Hügel (Höhe $h = 1 \text{ m}$) geschoben, von dem sie über einen Hang (Länge $l = 20 \text{ m}$ über Grund) herabrollen. Die Anfangsgeschwindigkeit am Hang beträgt $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$. Der Rollreibungskoeffizient betrage $\mu_r = 0,002$.
- Welche Geschwindigkeit erreicht ein Waggon am Fuße des Hangs?
 - Wie weit rollt ein Waggon nach dem Herabrollen vom Hang auf einem ebenen Gleis?
 - Welche Steigung darf eine Gleistrasse höchstens haben, damit die Lokomotive den Zug ziehen kann?
 - Wie lang ist der Anhalteweg des Zuges bei einer Notbremsung aus einer Geschwindigkeit $v = 120 \text{ km/h}$ auf einem ebenen Gleis, wenn dabei alle Räder blockieren?

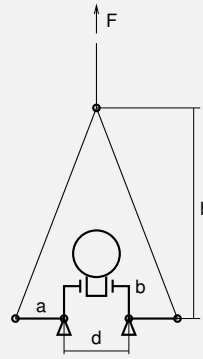
Reibung – Übungen

7. Eine Leiter aus Stahl (Länge $l = 5 \text{ m}$, Gewicht $m = 15 \text{ kg}$) steht auf einem Untergrund aus Stein unter dem Winkel $\alpha = 60^\circ$ gegen die Waagerechte an einer hölzernen Wand. Eine Person (Masse $M = 75 \text{ kg}$) besteigt die Leiter. Wie hoch kann die Person maximal steigen, ohne die Leiter ins Rutschen zu bringen, wenn
- das Gewicht der Leiter und die Reibung an der Wand vernachlässigt wird?
 - nur das Gewicht der Leiter vernachlässigt wird?
 - nur die Reibung an der Wand vernachlässigt wird?
 - weder Leitergewicht noch Wandreibung vernachlässigt werden?

Reibung – Übungen

8. Eine Felgenbremse wird mit der Kraft $F = 50 \text{ N}$ betätigt. Die Geometrie der Bremse ist gegeben ($a = 30 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$, $d = 70 \text{ mm}$, $h = 130 \text{ mm}$, Felgendurchmesser $D = 700 \text{ mm}$). Der Haft-, beziehungsweise Gleitreibungskoeffizient zwischen Backen und Felge betrage $\mu_0 = 0,5$, $\mu = 0,4$.

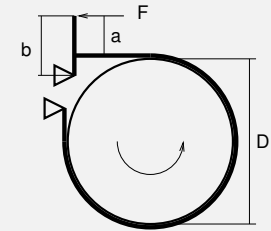
- Wie groß ist die Kraft F_B , mit der die Bremsbacken an die Felge gepresst werden?
- Welches Bremsmoment M wird maximal erreicht? Welche Bremskraft F_F erfährt das Fahrrad dabei?
- Welchen Weg legt das Rad (belastet mit der Masse $m = 50 \text{ kg}$) in welcher Zeit beim Bremsen aus der Geschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ km/h}$ zurück?
- Wenn die Betätigungskraft ansteigt, kommt es zum Blockieren des Rades. Bei welcher Betätigungskraft geschieht dies? Wie wirkt sich das Blockieren auf die Bremskraft aus?



Reibung – Übungen

9. Eine Bandbremse, bei der ein Stahlband auf einer rotierenden Stahltrommel (Durchmesser $D = 800 \text{ mm}$) reibt, wird über einen Hebel ($a = 200 \text{ mm}$, $b = 1,5 a$) mit der Kraft $F = 5 \text{ kN}$ betätigt.

- Welches Bremsmoment wird bei rotierender Trommel erreicht?
- Welches Bremsmoment wird bei stehender Trommel erreicht?
- Welche Betätigungskraft F_s würde eine Scheibenbremse an den Bremsklötzen benötigen, die bei gleichem Durchmesser und Reibungsbeiwert arbeitet?



Reibung – Übungen

10. Eine Parkettschleifmaschine (Masse $m = 50 \text{ kg}$) arbeitet nach dem Prinzip des Bandschleifers: das endlose Schleifband wird von einer Rolle angetrieben (Reibungskoeffizient zwischen Rolle und Schleifband ist $\mu_r = 0,4$) und läuft über eine Umlenkrolle zurück. Mit dieser Umlenkrolle wird das Schleifband außerdem vorgespannt. Die Rollen besitzen den gleichen Durchmesser. Der Reibungskoeffizient zwischen Schleifband und Parkett betrage $\mu_p = 0,9$.

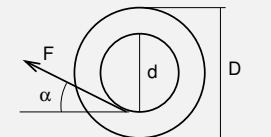
- Mit welcher Kraft F_h muss die Maschine im Betrieb gehalten werden?
- Mit welcher Kraft F_s muss die Umlenkrolle mindestens vorgespannt sein, damit das Schleifband im laufenden Betrieb unter dem Eigengewicht der Maschine nicht durchrutscht?

11. Ein Eisbrecher bringt eine Pfahlzugkraft von $F_z = 2 \text{ MN}$ auf. Wie viele Umschlingungen muss eine Festmacherleine an einem Poller aufweisen, wenn die Leinenkraft hinter dem Poller durch eine Person aufgebracht werden soll und lediglich $F_p = 200 \text{ N}$ beträgt? Der Reibungskoeffizient betrage $\mu = 0,4$.

Reibung – Übungen

12. Eine hölzerne Garnrolle ($d = 15 \text{ mm}$, $D = 30 \text{ mm}$) liegt auf einer waagerechten Holzplatte. Am Faden wird unter dem Winkel $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ gezogen.

- In welche Richtung rollt beziehungsweise rutscht die Garnrolle bei den genannten Winkeln?
- Bei welchem Winkel α_0 geht Rutschen in Rollen über? In welche Richtung bewegt sich die Rolle hier?



Federn

- ▶ Federsteifigkeit

$$D = \frac{dF}{ds}$$

- ▶ konstant $F = D s$
- ▶ progressiv/degressiv

- ▶ Vorspannung

$$F = (s + s_0)D$$

- ▶ Arbeit

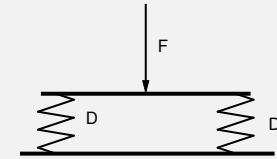
$$W = \int F ds$$

- ▶ Reihen-/Parallelschaltung

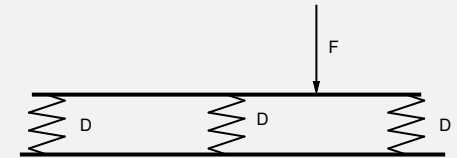
Gefederte Lagerung

Beispiel Balken

- ▶ statisch bestimmte Lagerung



- ▶ statisch unbestimmte Lagerung

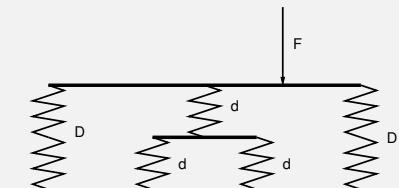


Federn – Übungen

- n Federn der Federsteifigkeit D_i sind parallel/seriell angeordnet
 - wie groß ist die Gesamtsteifigkeit der Anordnung allgemein?
 - welche Steifigkeit ergibt sich für zwei gleiche Federn mit $D = 100 \text{ N/mm}$?
 - wie müssen Federn der Steifigkeit $D = 100 \text{ N/mm}$ angeordnet werden, damit die Gesamtsteifigkeit $D_g = 250 \text{ N/mm}$ beträgt?
- Ein Körper der Masse $m = 20 \text{ kg}$ fällt aus der Höhe $h = 2,5 \text{ m}$ im Erdschwerefeld auf eine ungespannte/vorgespannte ($s_0 = 20 \text{ mm}$) Feder der Steifigkeit $D = 160 \text{ N/mm}$. (Feder­masse und Hubarbeit der Stauchung seien vernachlässigbar.)
 - Um welchen Weg wird die Feder jeweils gestaucht?
 - Wie groß ist jeweils die maximale Federkraft?

Federn – Übungen

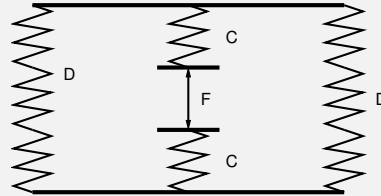
- Eine Feder ($d = 200 \text{ N/mm}$) sei ungespannt/vorgespannt ($s_0 = 10 \text{ mm}$). Nun wirken die Kräfte $F_1 = 1800 \text{ N}$ beziehungsweise $F_2 = 2400 \text{ N}$ auf die Feder.
 - wie groß sind die jeweiligen Stauchungen?
 - Welche Federkräfte treten in dem jeweiligen Fall auf?
- Ein Balken (Länge $L = 2 \text{ m}$) ruht auf einer gefederten Konstruktion ($d = 2 \text{ kN/mm}$, $D = 5 \text{ kN/mm}$). Es greift die Kraft $F = 10 \text{ kN}$ an. (Querversatz durch Neigung kann vernachlässigt werden.)
 - Wie weit wird der Balken am Kraftangriffspunkt bewegt?
 - Welche Neigung hat der Balken nach Aufbringen der Kraft?
 - Welche Kräfte liegen in den einzelnen Federn an?
 - Um welche Wege werden die Federn gestaucht?



Federn – Übungen

5. Ein Klemmrahmen ist mit ungespannten/vorgespannten ($s_0 = 10 \text{ mm}$) Federn ($C = 200 \text{ N/mm}$, $D = 300 \text{ N/mm}$) versehen. Auf einen eingespannten Gegenstand soll eine Klemmkraft von $F = 1200 \text{ N}$ wirken.

- welche Kräfte herrschen in den jeweiligen Federn?
- wie weit klaffen die Angriffspunkte der Federn jeweils auseinander?



Spannung

- Spannung: Belastung auf Schnittfläche bezogen:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Schnittfläche gegen Belastungsrichtung geneigt:
 - Normalspannung σ
 - Schubspannung τ
- zulässige Spannung: Werkstoff

Dehnung

- Verschiebung u in Richtung x eines Stabes:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$$

- konstante Dehnung: relative Längenänderung unter Last:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Stoffgesetz

- Hooke'sches Gesetz, Elastizitätsmodul E :

$$\sigma = E \varepsilon$$

- Wärmedehnung, Wärmedehnungsbeiwert α :

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

- Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Material	E-Modul in N/mm^2	α in $10^{-6}/\text{K}$
Stahl	210000	12
Aluminium	70000	23
Beton	30000	11
Holz	100000	25

Spannung/Dehnung – Übungen

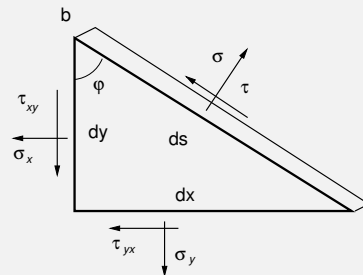
- Ein runder Stab wird mit der Kraft $F = 25 \text{ kN}$ belastet.
 - Wie groß muss sein Durchmesser D sein, wenn die zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 300 \text{ N/mm}^2$ beträgt?
 - Welche Spannung erfährt der Stab, wenn sein Durchmesser $D = 8 \text{ mm}$ beträgt?
- Ein konischer Stab (Durchmesser $d = 5 \text{ mm}$, $D = 8 \text{ mm}$ besitzt die Länge $l = 300 \text{ mm}$. Er wird mit der Kraft $F = 1500 \text{ N}$ belastet.
 - Wie hoch ist die größte beziehungsweise kleinste Spannung im Stab? Wo tritt sie jeweils auf?
 - Geben Sie formelmäßig an, wie die Spannung sich entlang des Stabes verändert! Formulieren Sie in Abhängigkeit des Abstands vom dünneren Ende!
- In einem Stahlrohr ($L = 400 \text{ mm}$, $D_a = 30 \text{ mm}$, $D_i = 20 \text{ mm}$) steckt volumenfüllend ein Aluminiumzylinder. Das Bauteil wird stirnseitig mit $F = 50 \text{ kN}$ belastet.
 - Welche Spannungen herrschen in den Einzelteilen?
 - Welche Dehnung beziehungsweise welche Verformung stellt sich ein?

Spannung/Dehnung – Übungen

- Ein runder Draht ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) hängt im Erdschwerefeld. An der Einspannung beträgt sein Durchmesser $D = 12 \text{ mm}$.
 - Welche Spannung herrscht an der Einspannung, wenn der Draht einen konstanten Durchmesser und eine Länge $L = 1250 \text{ m}$ besitzt?
 - Wie lang kann der Draht bei konstantem Durchmesser werden, wenn seine zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 550 \text{ N/mm}^2$ beträgt?
 - Wie müsste sich der Durchmesser entlang des Drahtes verändern, damit die Spannung konstant bleibt? Wie lang ist der Draht dann beim Durchmesser $d = 8 \text{ mm}$? Welche Last kann dort getragen werden?
- Ein Stahlbolzen ($L = 160 \text{ mm}$, $D = 25 \text{ mm}$) ist auf halber Länge auf $d = 18 \text{ mm}$ abgesetzt. Er soll bei Umgebungstemperatur von 20°C längs zwischen zwei starre Flächen montiert werden.
 - welche Spannungen stellen sich im Bolzen ein, wenn das Übermaß $s = 0,3 \text{ mm}$ beträgt?
 - Auf welche Länge zieht sich der Bolzen zusammen, wenn er in flüssigem Stickstoff auf eine Temperatur von $T_S = -196^\circ\text{C}$ abgekühlt wird? Kann er nun problemlos montiert werden?
 - Welche Spannung stellt sich im montierten Bolzen ein, wenn er auf 160°C erhitzt wird?

Spannungszustand– eben

- ▶ kleiner dreieckiger Ausschnitt
- ▶ Dicke b , $dA = b ds$
- ▶ eben belastet
- ▶ Schnittlasten bei Winkel φ



Spannungszustand – eben: Gleichgewicht

in Richtung σ :

$$\begin{aligned} \sigma dA &= (\sigma_x b dy) \cos \varphi + (\tau_{xy} b dy) \sin \varphi \\ &\quad + (\sigma_y b dx) \sin \varphi + (\tau_{yx} b dx) \cos \varphi \\ \sigma &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

in Richtung τ :

$$\begin{aligned} \tau dA &= (\tau_{xy} b dx) \cos \varphi + (\sigma_y b dx) \cos \varphi \\ &\quad - (\sigma_x b dy) \sin \varphi - (\tau_{yx} b dx) \sin \varphi \\ \tau &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos \varphi \sin \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

Trigonometrie – Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
 z &= x + iy = r e^{i\varphi} \\
 e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\
 e^{2i\varphi} &= (e^{i\varphi})^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi \\
 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= 1 \\
 \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\
 \sin 2\varphi &= 2 \cos \varphi \sin \varphi \\
 \cos^2 \varphi &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\
 \sin^2 \varphi &= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

Spannungszustand – eben: Doppelwinkel

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\
 \tau &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi
 \end{aligned}$$

Quadrieren und Addieren ...

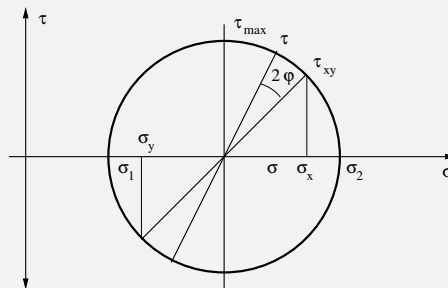
Spannungszustand – eben: Mohr'scher Spannungskreis

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\tau_{max}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \sigma_M \pm \tau_{max}$$



Spannungszustand – Übungen

- Ein dünnwandiges (Wandstärke $b = 3 \text{ mm}$) Rohr (Innendurchmesser $d = 50 \text{ mm}$) steht unter Innendruck $p = 50 \text{ bar}$.
 - Welche Spannung herrscht in einer Schnittfläche senkrecht zur Rohrachse?
 - Welche Spannung herrscht in einer Schnittfläche, in der die Rohrachse liegt?
 - Vergleichen Sie die vorher bestimmten Spannungen! Welches Rissbild wird das Rohr zeigen, wenn die auftretenden Spannungen unzulässig hoch werden?
- Eine dünnwandige (Wandstärke $b = 5 \text{ mm}$) Hohlkugel (Innendurchmesser $d = 250 \text{ mm}$) steht unter Innendruck $p = 60 \text{ bar}$. Welche Belastbarkeit muss das Wandmaterial aufweisen, damit Bersten mit einer Sicherheit von $S = 5$ ausgeschlossen werden kann?

Querkontraktion

- ▶ Zug mit σ_x an einer Scheibe führt zu Querkontraktion

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu \varepsilon_x\end{aligned}$$

- ▶ ν : Poisson'sche Zahl (für Metalle meist $\nu \approx 0,3$)
- ▶ reiner Schub τ_{xy} an einer Scheibe führt zu Gleitung γ_{xy}

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

- ▶ Schubmodul G (ohne Herleitung)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Festigkeitshypothesen

$$\sigma_v < \sigma_{zul}$$

Normalspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_1$$

Schubspannungshypothese

$$\begin{aligned}\sigma_v &= 2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_2 \\ &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

Hypothese der Gestaltänderungsenergie

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

Festigkeitshypothesen – Übungen

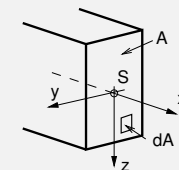
1. Aus Messungen oder Berechnungen sind für ein Bauteil an einer kritischen Stelle die folgenden Spannungen bekannt:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 360 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y &= 310 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xy} &= 160 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die Vergleichsspannungen nach den unterschiedlichen Festigkeitshypothesen!
- b) Welche Belastbarkeit muss der Werkstoff aufweisen, wenn die Belastung mit doppelter Sicherheit ertragen werden soll?

Biegebelastung

- ▶ Balken
 - ▶ Querschnitt A , Schwerpunkt S
 - ▶ Achsen: längs x , quer y , hoch z
 - ▶ Ursprung in neutraler Faser
- ▶ Belastung durch Moment M um y
- ▶ Spannung steigt zum Rand: $\sigma = cz$
- ▶ Moment über Querschnitt:



$$\begin{aligned}M &= \int z \sigma dA = \int c z^2 dA \\ I &= \int z^2 dA \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{M}{I} z, \quad c = \frac{M}{I}\end{aligned}$$

Flächenmomente 1. Ordnung – statisches Moment

- ▶ Flächenschwerpunkt

$$y_s = \frac{S_z}{A}$$

$$z_s = \frac{S_y}{A}$$

- ▶ statisches Moment (verschwindet, wenn Koordinatenursprung im Schwerpunkt)

$$S_y = \int z \, dA$$

$$S_z = \int y \, dA$$

Statisches Moment – Beispiel Viertelkreis

$$S_y = \int z \, dA$$

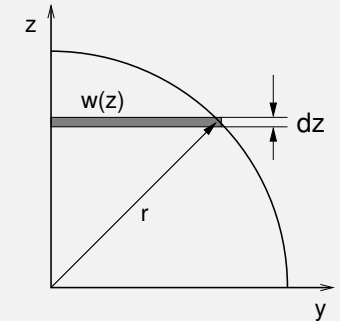
$$= \int_0^r z \, w(z) \, dz$$

$$w^2 = r^2 - z^2$$

$$2w \, dw = -2z \, dz$$

$$= - \int_r^0 w^2(z) \, dw$$

$$= \frac{r^3}{3}$$



$$z_s = \frac{S_y}{A}$$

$$A = \frac{\pi}{4} r^2$$

$$= \frac{4r}{3\pi}$$

Flächenmomente 2. Ordnung – Flächenträgheitsmomente

- ▶ Flächenträgheitsmomente I_y, I_z
- ▶ Polares Flächenträgheitsmomente I_p
- ▶ Deviationsmoment I_{yz}

$$I_y = \int z^2 \, dA$$

$$I_z = \int y^2 \, dA$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int yz \, dA$$

$$I_p = \int r^2 \, dA = \int (z^2 + y^2) \, dA$$

$$= I_y + I_z$$

Flächenträgheitsmomente – Eigenschaften

- ▶ Einheit: Länge⁴
- ▶ Flächenträgheitsmomente I_y, I_z und I_p immer positiv
- ▶ Deviationsmomente
 - ▶ verschwinden für symmetrische Flächen
 - ▶ können positiv oder negativ sein
- ▶ Additiv über Teilflächen A_i

$$I_y = \int_A z^2 \, dA = \int_{A_1} z^2 \, dA + \int_{A_2} z^2 \, dA + \dots = \sum_i I_{y_i}$$

- ▶ Trägheitsradius:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Flächenträgheitsmomente – Rechteck

- ▶ statische Momente:

$$S_y = \int z \, dA = b \int_{-h/2}^{h/2} z \, dz = 0, \quad S_z = 0$$

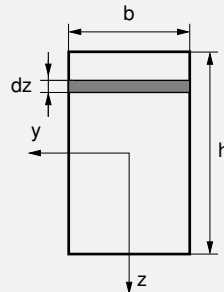
- ▶ Flächenträgheitsmomente:

$$I_y = \int z^2 \, dA = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_z = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 0 \quad (\text{wegen Symmetrie})$$

$$I_p = I_y + I_z = b h \frac{b^2 + h^2}{12}$$



Flächenträgheitsmomente Kreisring

- ▶ statische Momente (Symmetrie):

$$S_y = S_z = 0$$

- ▶ Flächenträgheitsmomente:

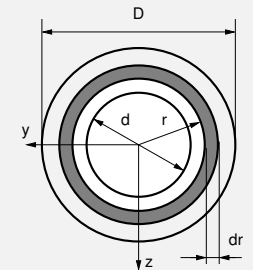
$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2}$$

$$I_p = \int r^2 \, dA, \quad dA = 2\pi r \, dr$$

$$= 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 \, dr = \pi \frac{D^4 - d^4}{32}$$

$$\Rightarrow I_y = I_z = \pi \frac{D^4 - d^4}{64}$$

$$I_{yz} = I_{zy} = 0 \quad (\text{Symmetrie})$$



Parallelverschiebung – Satz von Steiner

- ▶ verschobenes Koordinatensystem

$$u = y + u_s, \quad v = z + v_s$$

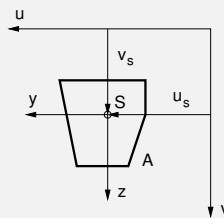
- ▶ Trägheitsmomente im u, v -System

$$\begin{aligned} I_u &= \int u^2 \, dA = \int (y + u_s)^2 \, dA \\ &= \int y^2 \, dA + 2u_s \int y \, dA + u_s^2 \int dA \\ \int y \, dA &= S_z \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_u = I_y + u_s^2 A$$

$$I_v = I_z + v_s^2 A$$

$$I_{uv} = I_{vu} = I_{yz} - u_s v_s A$$



Satz von Steiner – Beispiel

$$I_z = 2 \frac{d b^3}{12} + \frac{h t^3}{12}$$

$$= \frac{2 d b^3 + h t^3}{12}$$

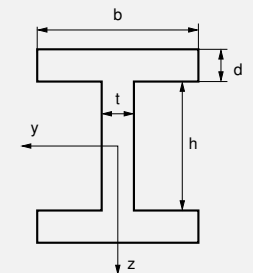
$$I_y = 2 \left(\frac{b d^3}{12} + b d \left(\frac{h+d}{2} \right)^2 \right) + \frac{t h^3}{12}$$

$$= \frac{2 b d (d^2 + 3(h+d)^2) + t h^3}{12}$$

$$I_p = I_y + I_z$$

$$= \frac{2 b d (d^2 + b^2 + 3(h+d)^2) + t h^3 + t^3 h}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$



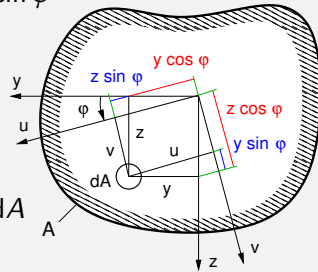
Drehung – Hauptachsentransformation

- Drehung des Koordinatensystems

$$u = y \cos \varphi + z \sin \varphi, \quad v = z \cos \varphi - y \sin \varphi$$

- Flächenträgheitsmomente

$$\begin{aligned} I_u &= \int v^2 dA \\ &= \cos^2 \varphi \int z^2 dA + \sin^2 \varphi \int y^2 dA \\ &\quad - 2 \cos \varphi \sin \varphi \int y z dA \\ &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_v &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{uv} &= -\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi = I_{vu} \end{aligned}$$



Hauptachsentransformation – Eigenschaften

- Invariante

$$I_u + I_v = I_y + I_z = I_p$$

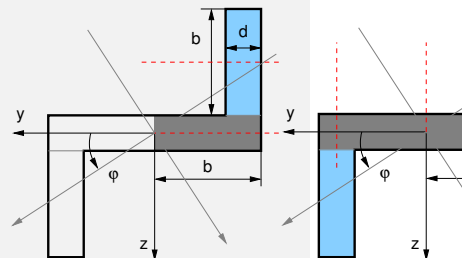
- Extremale Flächenträgheitsmomente – Hauptträgheitsmomente

$$\begin{aligned} \frac{dI_u}{d\varphi} = \frac{dI_v}{d\varphi} &\equiv 0 \\ \Rightarrow -\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi &= 0 \\ \Rightarrow \tan 2\varphi &= \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \\ \Rightarrow I_{1,2} &= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \end{aligned}$$

Hauptträgheitsmomente – Beispiel

- Flächenträgheitsmomente

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \left(\frac{b d^3 + d b^3}{12} + b d \left(\frac{b+d}{2} \right)^2 \right) \\ &= b d \frac{2 d^2 + 3 b d + 2 b^2}{3} \\ I_z &= \frac{(2b)^3 d + 2 d^3 b}{12} + 2 b d (b - d/2)^2 \\ &= 2 b d \frac{4 b^2 + d^2 - 3 b d}{3} \\ I_{yz} &= -2 b d \frac{b+d}{2} (b - d/2) \\ &= b d \frac{d^2 - b d - 2 b^2}{2} \end{aligned}$$



Rechenbeispiel:

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ mm} \\ d &= 10 \text{ mm} \\ \Rightarrow b &= 3d \end{aligned}$$

Hauptträgheitsmomente – Beispiel

- Flächenträgheitsmomente

$$\begin{aligned} I_y &= 29 d^4 \\ I_z &= 56 d^4 \\ I_{yz} &= -30 d^4 \end{aligned}$$

- Hauptachsenrichtungen

$$\begin{aligned} \tan 2\varphi &= \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z} \\ &= 3 \frac{d^2 - b d - 2 b^2}{3 b d - 2 b^2} = \frac{20}{9} \\ \Rightarrow \varphi_1 &= 32,9^\circ, \quad \varphi_2 = 122,9^\circ \end{aligned}$$

- Hauptträgheitsmomente

$$\begin{aligned} I_1 &= 75,4 d^4 \\ I_2 &= 9,6 d^4 \end{aligned}$$

Biegespannungen

- ▶ Normalspannungen im Balkenquerschnitt $\sigma = \frac{M}{I} z$
- ▶ Widerstandsmoment $W = \frac{I}{|z_{max}|}$
- ▶ maximale Spannung $\sigma_{max} = \frac{M}{W} < \sigma_{zul}$
- ▶ Beispiel: auf Balken (Länge L , Breite b , Höhe h) lastet mittig Kraft F . Biegespannung σ ?

$$M = F \frac{L}{4}$$

$$I = \frac{b h^3}{12}$$

$$z_{max} = \frac{h}{2}$$

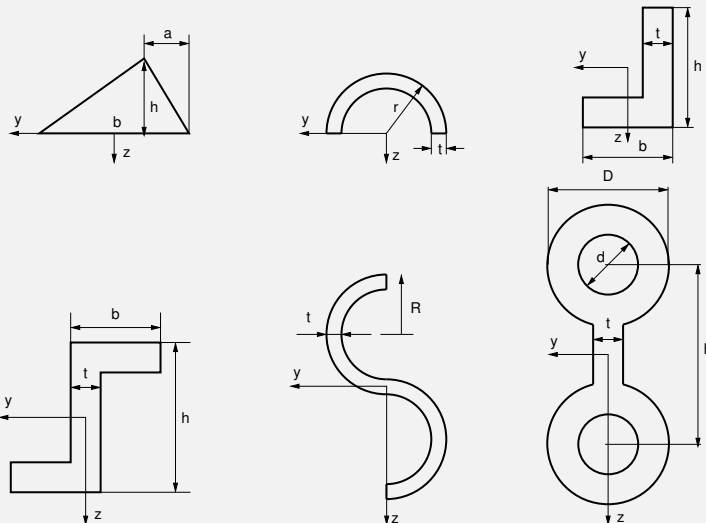
$$\Rightarrow W = \frac{b h^2}{6}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{3 F L}{2 b h^2}$$

Flächenmomente – Übungen

- Bestimmen Sie für die folgenden Profile:
 - die statischen Momente bezüglich der gegebenen Koordinatensysteme,
 - die Schwerpunktlage im gegebenen Koordinatensystem,
 - die Flächenträgheitsmomente I_y , I_z und I_p bezüglich der gegebenen Koordinatensysteme,
 - das Deviationsmoment bezüglich der gegebenen Koordinatensysteme,
 - die Flächenträgheits- und Deviationsmomente bezüglich der in die Schwerpunkte verschobenen Koordinatensysteme,
 - die Hauptträgheitsmomente bezüglich der Schwerpunkte!

Flächenmomente – Übungen – Profile



Flächenmomente – Übungen – Biegespannungen

- Ein Kragbalken wird als Rohr von Kreisringquerschnitt ($l = 2$ m, $D = 40$ mm, $d = 30$ mm) ausgeführt. Am Ende wirkt eine Last $F = 2$ kN.
 - Wie hoch ist die Biegespannung?
 - Wie hoch darf die Last werden, wenn die zulässige Biegespannung $\sigma_{zul} = 300$ N/mm² beträgt?
- Ein Balken mit Quadratrohrquerschnitt (Wandstärke $t = 5$ mm, Länge $l = 2$ m) ist beidseitig gelenkig gelagert. Mittig greift eine Kraft $F = 50$ kN an. Welche Kantenlänge b muss das Quadratprofil besitzen, wenn die zulässige Biegespannung $\sigma_{zul} = 300$ N/mm² beträgt ($t \ll b$)?

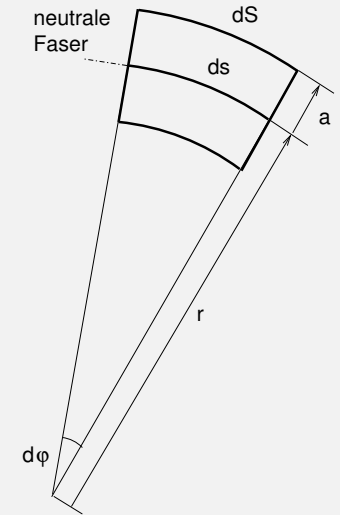
Biegelinie – Voraussetzungen

Voraussetzungen (nach Bernoulli):

- ▶ gerader Balken
- ▶ schubstarr
- ▶ keine Längskräfte
- ▶ kleine Verformungen
- ▶ Hooke'sches Material

Biegelinie – Krümmung

$$\begin{aligned} ds &= r d\varphi \\ dS &= (r + a) d\varphi \\ dS - ds &= a d\varphi \\ \varepsilon &= \frac{dS - ds}{ds} = \frac{a d\varphi}{r d\varphi} = \frac{a}{r} \\ \sigma &= E \varepsilon \\ \sigma &= \frac{M}{I} a \\ \Rightarrow r &= \frac{EI}{M} \end{aligned}$$



Biegelinie – Krümmungskreis

$$(x - x_0)^2 + (w - w_0)^2 = r^2$$

$$x - x_0 + (w - w_0) \cdot w' = 0$$

$$1 + w'^2 + (w - w_0) \cdot w'' = 0$$

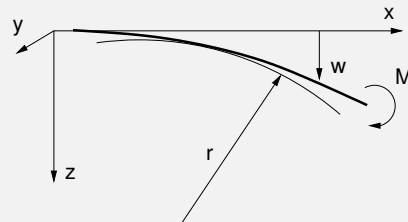
$$\Rightarrow w - w_0 = -\frac{1 + w'^2}{w''}$$

$$x - x_0 = \frac{1 + w'^2}{w''} \cdot w'$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{(1 + w'^2)^3}{w''^2} \approx \frac{1}{w''^2}, \quad (w'^2 \ll 1)$$

$$r = -\frac{1}{w''}, \quad (M < 0)$$

$$\Rightarrow w'' = -\frac{M}{EI}$$



Biegelinie

- ▶ aus Statik

$$F' = -q$$

$$M' = F$$

- ▶ Annahme: $EI = \text{const}$

- ▶ Moment M gegeben:

$$w'' = -\frac{M}{EI}$$

- ▶ Kraft F gegeben:

$$w''' = -\frac{F}{EI}$$

- ▶ Streckenlast q gegeben:

$$w'''' = \frac{q}{EI}$$

Biegelinie – Lösung

- ▶ Annahme: Streckenlast $q = q_0 = \text{const}$
- ▶ Integration über $0 \leq x \leq L$

$$EI w'''' = q = q_0$$

$$EI w''' = -Q = q_0 x + C_1$$

$$EI w'' = -M = q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI w' = q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w = q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

- ▶ Integrationskonstante $C_1 \dots C_4$ aus Randbedingungen

Biegelinie – Beispiel

$$w(x=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$w'(x=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$M(x=L) = 0 \Rightarrow q_0 \frac{L^2}{2} + C_1 L + C_2 = 0$$

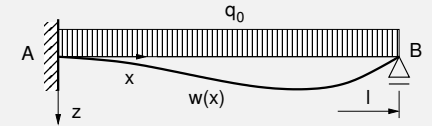
$$w(x=L) = 0 \Rightarrow q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{5}{8} q_0 L, \quad C_2 = \frac{1}{8} q_0 L^2$$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 EI} \left(t^4 - \frac{5}{2} t^3 + \frac{3}{2} t^2 \right), \quad t = \frac{x}{L}$$

$$w_{\max} = w\left(t = \frac{15 - \sqrt{33}}{16}\right) = \frac{5 \sqrt[3]{33} + 117}{196608 EI} q_0 L^4$$

$$A = Q(0) = \frac{5}{8} q_0 L, \quad B = \frac{3}{8} q_0 L, \quad M_A = M(0) = -\frac{q_0 L^2}{8}$$



Biegelinie – Mehrfelder-Beispiel

- ▶ Moment M nicht stetig:

$$EI w_a'' = -M(x) = -F b x/L, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$EI w_a = -F b \frac{x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$EI w_b'' = -F a (1 - x/L), \quad a \leq x \leq L$$

$$EI w_b = -F a \frac{(L-x)^3}{6L} - C_3 (L-x) + C_4$$

- ▶ Randbedingungen:

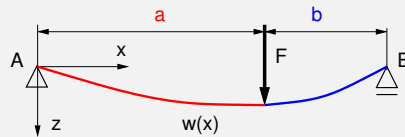
$$w_a(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$w_b(L) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$w_a(a) = w_b(a)$$

$$w_a'(a) = w_b'(a)$$

$$\Rightarrow C_1 = F a b \frac{a+2b}{6L}, \quad C_3 = F a b \frac{b+2a}{6L}$$



Biegelinie – Mehrfelder-Beispiel – Lösung

- ▶ Biegelinie

$$w(x) = \begin{cases} \frac{F b L^2}{6 EI} \frac{x}{L} \left(1 - \left(\frac{b}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) & 0 \leq x \leq a \\ \frac{F a L^2}{6 EI} \frac{L-x}{L} \left(1 - \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \left(\frac{L-x}{L} \right)^2 \right) & a \leq x \leq L \end{cases}$$

- ▶ Kraftangriffspunkt

$$w(x=a) = \frac{F a^2 b^2}{3 EI}$$

Biegelinie – Superposition

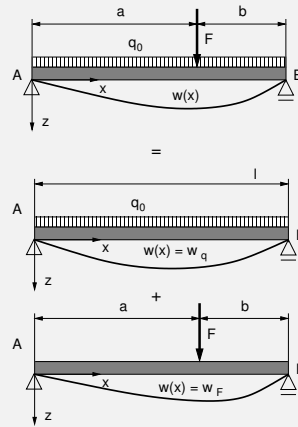
- ▶ Differentialgleichung der Biegelinie linear
- ▶ ⇒ Lösungen können überlagert werden
- ▶ Beispiel: Streckenlast q_0 und Einzellast F

$$w(x) = w_q(x) + w_F(x)$$

$$w'(x) = w'_q(x) + w'_F(x)$$

$$M(x) = M_q(x) + M_F(x)$$

$$Q(x) = Q_q(x) + Q_F(x)$$

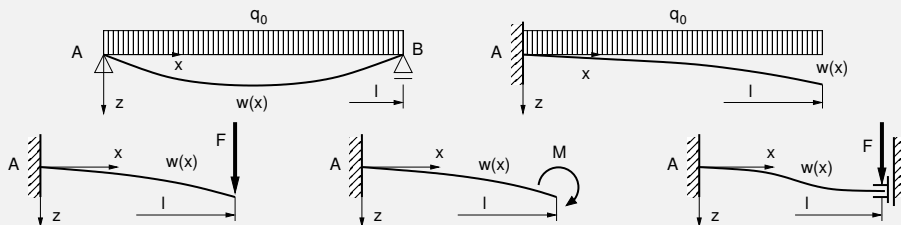


Balkenbiegung – Verallgemeinerung

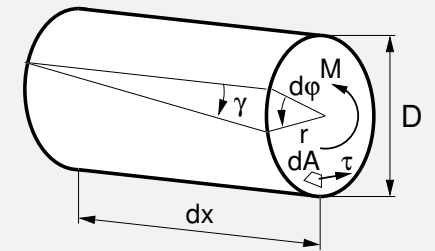
- ▶ Schub → kurze/stumpfe Biegung
- ▶ asymmetrische Profile → schiefe Biegung
- ▶ Längskraft
- ▶ veränderliche Profile
 - ▶ stetig
 - ▶ unstetig
- ▶ Werkstoffkombinationen
- ▶ große Verformungen

Biegelinie – Übungen

- Bestimmen Sie formelmäßig für die skizzierten Lastfälle:
 - die Durchbiegung $w = w(x)$,
 - maximale Durchbiegung w_{max} sowie deren Position,
 - die Lagerreaktionen A, B und M_A ,
 - die Neigung $w'(x)$ sowie deren Werte an der Stelle größter Durchbiegung sowie an den Lagern!
- Bestimmen Sie durch Superposition die Größen der vorherigen Aufgabe für beliebige Kombinationen der skizzierten Lastfälle!



Torsion – Kreis(ring)welle



$$r d\varphi = \gamma dx$$

$$\Rightarrow \gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\tau = G \gamma$$

$$\Rightarrow \tau = G r \frac{d\varphi}{dx}$$

$$M = \int r \tau dA$$

$$M = G \frac{d\varphi}{dx} \int r^2 dA$$

$$= G \frac{d\varphi}{dx} I_p$$

$$\varphi_L = \int_0^L \frac{d\varphi}{dx} dx$$

$$= \frac{M L}{G I_p}$$

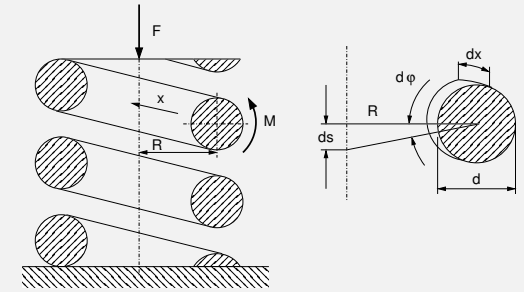
$$C_t = \frac{M L}{\varphi} = G I_p$$

Kreiswelle – Torsionsbelastung

$$\begin{aligned}\tau &= r \frac{M}{I_p} \\ \tau_{max} &= \tau(r = r_{max} = D/2) \\ &= \frac{M}{W_t} \\ W_t &= \frac{I_p}{r_{max}} \\ I_p &= \frac{\pi}{32} D^4 \\ \Rightarrow W_t &= \frac{\pi}{16} D^3\end{aligned}$$

Torsion – Wendelfeder

- ▶ Drahtdurchmesser d
- ▶ Wendelradius $R \ll d$
- ▶ Windungszahl n
- ▶ Drahtlänge L
- ▶ Steigungswinkel klein
 $\Rightarrow L = 2\pi n R$



$$\begin{aligned}d\varphi &= \frac{M}{G I_p} dx \\ ds &= R d\varphi \\ &= R \frac{M}{G I_p} dx = \frac{F R^2}{G I_p} dx \\ s &= \int_0^L \frac{F R^2}{G I_p} dx = 2\pi n \frac{F R^3}{G I_p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= \frac{F}{s} \\ &= \frac{G I_p}{2\pi n R^3} \\ &= \frac{G d^4}{64 n R^3}\end{aligned}$$

Torsion – Übungen

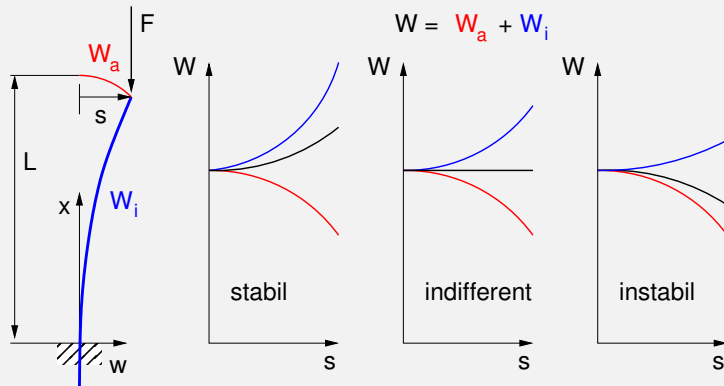
1. Eine Welle aus Stahl (Länge $L = 1600$ mm, Durchmesser $D = 36$ mm) ist einseitig fest eingespannt. Sie wird am anderen Ende mit einem Torsionsmoment $M = 1200$ Nm belastet.
 - a) Welche Schubspannung τ muss die Welle ertragen können?
 - b) Wie groß ist die Verdrehung φ der Welle?
 - c) Wie groß ist die Torsionssteifigkeit C_t der Welle?
 - d) Welche Arbeit E wird durch die Verdrehung an der Welle verrichtet?
 - e) Wie groß sind Schubspannung, Verdrehung, Torsionssteifigkeit und Verdrehungsarbeit, wenn die Welle mit $d = 24$ mm hohlgebohrt ist? Wie ändert sich die Masse m der Welle durch diese Maßnahme?
 - f) Welche maximale Biegespannung σ_b tritt in der Welle auf, wenn sie zusätzlich am freien Ende mit einer Querkraft $F = 800$ N belastet wird? Bestimmen Sie für die Vollwelle beziehungsweise die Hohlwelle unter Verwendung der verschiedenen Festigkeitshypothesen die erforderliche Festigkeit!

Torsion – Übungen

2. Eine Feder aus Stahl (Drahtdurchmesser $d = 3$ mm, Windungsradius $R = 12$ mm) besitzt $n = 12$ Windungen.
 - a) Welche Federsteifigkeit c besitzt die Feder?
 - b) Welche Längenänderung s erfährt die Feder bei Belastung mit einer Kraft $F = 100$ N?
 - c) Welche Schubspannung τ wirkt bei der genannten Last in der Feder?
 - d) Welche Arbeit W ist in der belasteten Feder gespeichert?
 - e) Wie ändern sich Federsteifigkeit, Längenänderung, Schubspannung und Arbeit, wenn jeweils der Drahtdurchmesser, der Windungsradius beziehungsweise die Windungszahl verdoppelt wird?
 - f) Erstellen Sie ein Diagramm, aus dem die Federsteifigkeit einer Stahlfeder bei einer Windung für unterschiedliche Drahtstärken und Windungsradien ersichtlich ist!

Knickung – Stabilität

- ▶ äußere Arbeit W_a : potentielle Energie
- ▶ innere Arbeit W_i : Formänderungsarbeit
- ▶ Gleichgewicht



Knickung – Euler-Ansatz

- ▶ Eulersches Knicken
- ▶ elastischer Bereich
- ▶ kleine Auslenkungen

$$EI w''(x) = -M_b(x) = -F w(x)$$

$$w''(x) = -\alpha^2 w(x)$$

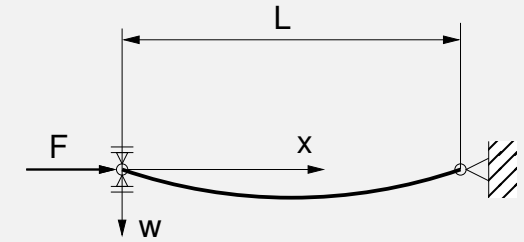
$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\Rightarrow w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

$$\text{II: } w(x=0) = w(x=L) = 0$$

$$B = 0, \quad \sin \alpha L = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



$$F_n = n^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

$$F_k = \pi^2 \frac{EI}{L_k^2}$$

Knickung – allgemeiner Euler-Ansatz

$$N d\varphi = dQ$$

$$dM = Q dx$$

$$M = EI w''$$

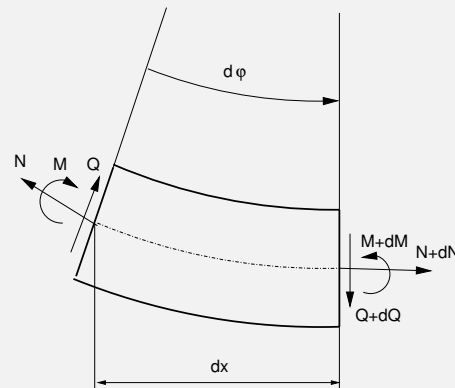
$$\varphi = -w'$$

$$dN \approx 0 \quad (w \ll L)$$

$$\Rightarrow N \approx -F$$

$$N \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d^2 M}{dx^2} = 0$$

$$EI w'''' + F w'' = 0$$



Ansatz:

$$w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \alpha x + D$$

Knickung – Eulerfall 3

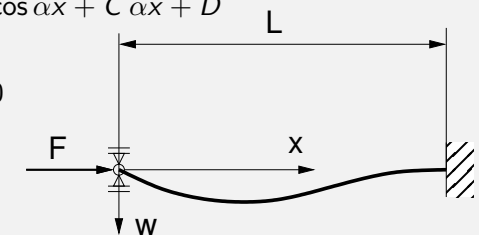
$$w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \alpha x + D$$

$$w(x=0) = 0 \quad w(x=L) = 0$$

$$w'(x=0) = 0 \quad w''(x=L) = 0$$

$$B + D = 0$$

$$A + C = 0$$



$$A \sin \alpha L + B \cos \alpha L = 0$$

$$A \sin \alpha L + B \cos \alpha L + C \alpha L + D = 0$$

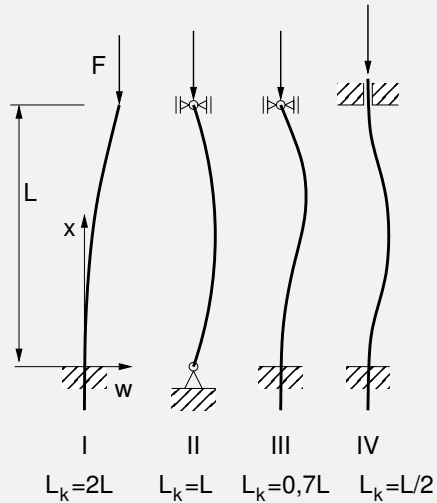
$$\Rightarrow A(\alpha L - \sin \alpha L) + B(1 - \cos \alpha L) = 0$$

$$\Delta = (1 - \cos \alpha L) \sin \alpha L - (\alpha L - \sin \alpha L) \cos \alpha L \equiv 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L = 0$$

$$\alpha L = \tan \alpha L \Rightarrow \alpha L \approx 4,49$$

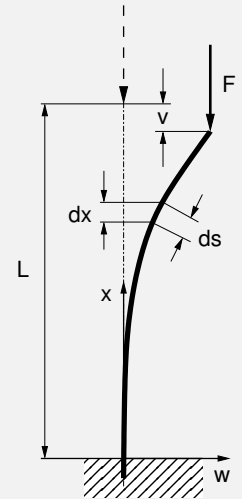
Knickung – Knickkräfte allgemein



$$F_k = \pi^2 \frac{EI}{L_k^2}$$

Knickung – Energiemethode

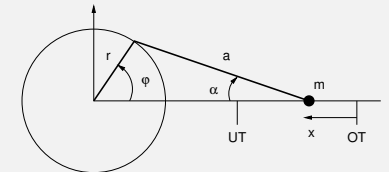
$$\begin{aligned} W &= Fv = W_a \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{M_b^2}{EI} dx = W_i \\ &= \frac{1}{2} \int EI w''(x) dx \\ v &= \int (ds - dx) \\ &= \int (\sqrt{1 + w'^2} - 1) dx \\ &\approx \frac{1}{2} \int w'^2 dx \\ \Rightarrow F_k &= \frac{2W}{2v} = \frac{\int EI w''(x) dx}{\int w'^2 dx} \end{aligned}$$



Knickung – Übungen

1. Ein runder Stab aus Stahl (Durchmesser $d = 12$ mm, Länge $L = 850$ mm) werde mit einer Kraft F auf Knickung belastet.
 - a) Bestimmen Sie für die vier Eulerfälle die kritischen Knicklasten F_k !
 - b) Wie ändern sich die Knicklasten in den vier Eulerfällen, wenn der Durchmesser beziehungsweise die Länge des Stabes verdoppelt werden?
 - c) Wie groß sind für die berechneten Lasten jeweils die Druckspannungen im Stab?
 - d) Wie ändern sich die Knicklasten in den vier Eulerfällen, wenn der Stab als Rohr (Außendurchmesser $D = 18$ mm) mit gleicher Querschnittsfläche ausgeführt wird?

Kinematik – Beispiel Kurbeltrieb



$$\begin{aligned} x &= r(1 - \cos \varphi) + a(1 - \cos \alpha) \\ r \sin \varphi &= a \sin \alpha \\ &= r \left(1 - \cos \varphi + \frac{1}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}) \right), \quad \lambda = \frac{r}{a} \\ &= r \left(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{\lambda^3}{8} u^4 + \frac{\lambda^5}{16} u^6 + \dots \right) \quad \text{Taylorreihe}(u = \sin \varphi) \\ &= r \left(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) + \frac{\lambda^3}{64} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3) + \dots \right) \\ &\approx r \left(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi) \right) \\ \dot{x} &\approx r\omega \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right), \quad \omega = \dot{\varphi} \\ \ddot{x} &\approx r\omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi) \end{aligned}$$

Kinematik – räumliche Bewegung starrer Körper

Räumliche Bewegung:

- ▶ Überlagerung von
 - ▶ Translation,
 - ▶ Rotation.
- ▶ Momentane Rotation um Momentanpol

Beschreibung der Bewegung:

- ▶ Ort eines Körperpunktes: Vektor (x, y, z)
- ▶ Translation: Verschiebungsvektor (u, v, w)

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) + (u, v, w).$$

- ▶ Rotation: Multiplikation mit Drehmatrix \mathbf{R}

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) \cdot \mathbf{R}.$$

Kinematik – Drehung

Kreisbewegung des Punktes:

$$v = r \dot{\varphi} = r \omega.$$

Beschleunigung:

$$a_r = -r \omega^2$$

$$a_t = r \dot{\omega}$$

Kinematik – Drehmatrix

Eigenschaften von Drehmatrizen \mathbf{R}

- ▶ orthogonal:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$$

- ▶ Inverse:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

- ▶ Determinante:

$$\det \mathbf{R} = 1$$

Kinematik – Drehung um Achse

Drehung Punkt $p \rightarrow q$ um Achse $g = \vec{a} + t\vec{d}$

Parameter:

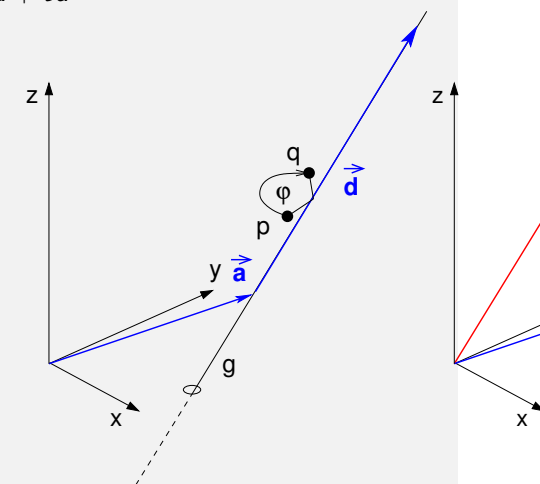
$$\vec{n} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \Rightarrow |\vec{n}| = 1$$

$$a = \vec{n} \cdot \vec{e}_x$$

$$b = \vec{n} \cdot \vec{e}_y$$

$$c = \vec{n} \cdot \vec{e}_z$$

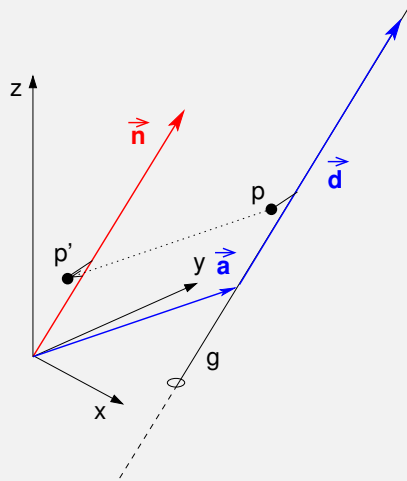
$$d = \sqrt{b^2 + c^2}$$



Kinematik – Drehung um Achse

1. Aufpunkt \rightarrow Ursprung

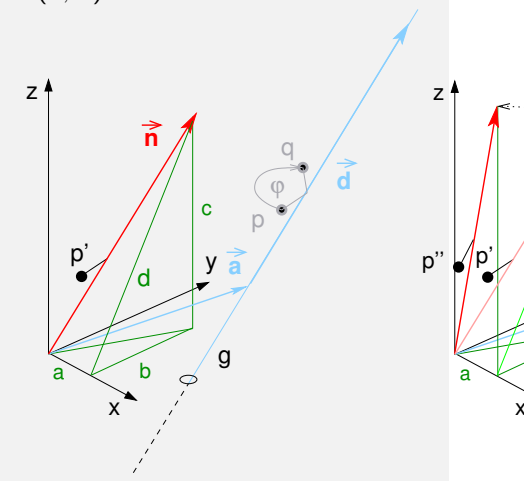
$$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{a}$$



Kinematik – Drehung um Achse

2. Drehung um $x \rightarrow x, z$ -Ebene – $(b, c) \rightarrow (0, d)$:

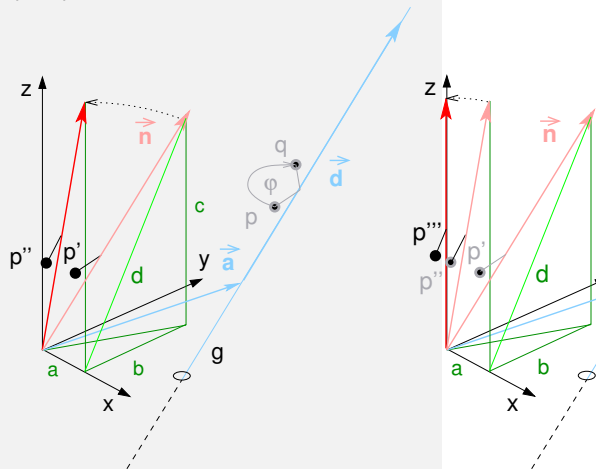
$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x,2} &= \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix} \\ (b, c) \cdot \mathbf{R}_{x,2} &= (0, d) \\ \Rightarrow \mathbf{R}_{x,2} &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} c & b \\ -b & c \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_x &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & -b & c \end{pmatrix} \\ \vec{p}'' &= \vec{p}' \cdot \mathbf{R}_x \end{aligned}$$



Kinematik – Drehung um Achse

3. Drehung um $y \rightarrow z$ -Achse – $(a, d) \rightarrow (0, 1)$:

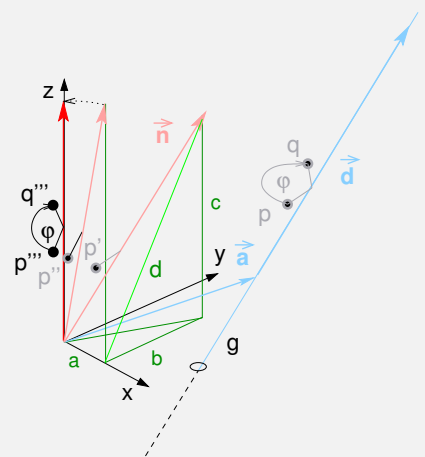
$$\begin{aligned} (a, d) \cdot \mathbf{R}_{y,2} &= (0, 1) \\ \Rightarrow \mathbf{R}_{y,2} &= \begin{pmatrix} d & a \\ -a & d \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_y &= \begin{pmatrix} d & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & d \end{pmatrix} \\ \vec{p}''' &= \vec{p}'' \cdot \mathbf{R}_y \end{aligned}$$



Kinematik – Drehung um Achse

4. Drehung mit Winkel φ um z -Achse:

$$\begin{aligned} (1, 0) \cdot \mathbf{R}_{z,2} &= (C, S) \\ C &= \cos \varphi \\ S &= \sin \varphi \\ \Rightarrow \mathbf{R}_{z,2} &= \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_z &= \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{q}''' &= \vec{p}''' \cdot \mathbf{R}_z \end{aligned}$$



Kinematik – Drehung um Achse

5. Umkehrung Schritt 3:

$$\vec{q}'' = \vec{q}''' \cdot \mathbf{R}_y^T$$

6. Umkehrung Schritt 2:

$$\vec{q}' = \vec{q}'' \cdot \mathbf{R}_x^T$$

7. Umkehrung Schritt 1:

$$\vec{q} = \vec{q}' + \vec{a}$$

Komplette Drehung:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{R}_y^T \cdot \mathbf{R}_x^T$$

$$\vec{q} = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \mathbf{R} + \vec{a}$$

Rotation um φ und Translation mit t :

$$\vec{q} = \vec{p} \cdot \mathbf{R} + \vec{t}$$

$$\vec{t} = \vec{a} - \vec{a} \cdot \mathbf{R}$$

Kinematik – Übungen

- Gegeben ist ein Kurbeltrieb. Der Kurbelradius sei $r = 40$ mm. Das Pleuel habe die Länge $a = 180$ mm. Am Pleuel führt die Masse $m = 600$ g eine oszillierende Bewegung aus, während die Kurbel mit $n = 4500$ 1/min rotiert. Kurbel und Pleuel können als masselos angenommen werden.
 - Wie groß sind die Massenkäfte erster und zweiter Ordnung?
 - Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit der Masse?
 - Bei welchem Kurbelwinkel tritt die betragsmäßig größte Beschleunigung der Masse auf? Wie groß ist sie?
- Für einen Kurbeltrieb wird das Kurbelverhältnis λ gesucht, für das die Massenkräfte zweiter Ordnung nicht mehr als 20% der Massenkräfte erster Ordnung betragen.

Kinematik – Übungen

- Gegeben sei ein würfelförmiger Körper. Seine Ecken liegen bei $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Der Körper soll mit dem Winkel $\varphi = \pi/3$ um die Achse $g = \vec{a} + t \vec{d}$ gedreht werden. Dabei sei $\vec{a} = (1, 2, 3)$ der Aufpunkt der Drehachse und $\vec{d} = (2, -1, 4)$ deren Richtung.
 - Wo liegen die Ecken des Würfels nach der Drehung?
 - Wo liegen die Würfecken, wenn anschließend eine Translation um $t = (-3, 5, 2)$ stattfindet?
 - Wo lägen die Würfecken, wenn Rotation und Translation in vertauschter Reihenfolge ausgeführt würden?

Kinetik der Rotation – Massenpunkt

- Impuls des Massenpunktes

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = m \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{F}$$

- Drehimpuls des Massenpunktes

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

$$\vec{r} \times \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v}) = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \dot{\vec{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Kinetik der Rotation – Massenpunkt, ebene Bewegung

Drehung um Achse – Massenträgheitsmoment J

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= M \\ L &= m r v = m r^2 \omega \\ J &= m r^2 \\ \Rightarrow L &= m r v = J \omega \\ J \ddot{\varphi} &= J \dot{\omega} = M\end{aligned}$$

Kinetik der Rotation – Starrkörper

► Massenelement dm

$$\begin{aligned}dJ \dot{\omega} &= dM \\ dJ &= r^2 dm \\ J \dot{\omega} &= M \\ J &= \int r^2 dm\end{aligned}$$

► Drehimpuls

$$\begin{aligned}dL &= r v dm = r^2 \omega dm \\ L &= \int dL = \omega \int r^2 dm \\ \Rightarrow L &= J \omega \\ \dot{L} &= M\end{aligned}$$

Kinetik der Rotation – Massenträgheitsmoment

► Massenträgheitsmoment J :

$$J = \int r^2 dm.$$

► Dichte ρ konstant:

$$J = \rho \int r^2 dV.$$

► Zylindrische Geometrie – Länge l :

$$\begin{aligned}V &= A l \\ \Rightarrow J &= \rho l \int r^2 dA. \\ &= \rho l I_p\end{aligned}$$

Kinetik der Rotation – Satz von Steiner

Schwerpunkt um r_s von Drehachse entfernt:

$$\begin{aligned}J_s &= \int r^2 dm \\ J &= \int (r + r_s)^2 dm \\ &= J_s + r^2 m\end{aligned}$$

Kinetik der Rotation – Massenträgheitsmoment Stab

Schlanker homogener Stab

- ▶ Länge l , Masse m
- ▶ Massenträgheitsmoment um Querachse durch Schwerpunkt

$$J_s = \int r^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = \frac{m l^2}{12}.$$

- ▶ Massenträgheitsmoment um Querachse am Stabende

$$J = J_s + m r_s^2 = J_s + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m l^2}{3}.$$

Kinetik der Rotation – Massenträgheitsmomente

- ▶ Kreiszyylinder
 - ▶ Durchmesser $D = 2R$, Länge l , Dichte ρ
 - ▶ Massenträgheitsmoment um Längsachse

$$J_s = \rho l \int r^2 dA = 2\pi \rho l \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho l R^4 = \frac{m R^2}{2}.$$

- ▶ Kugel
 - ▶ Radius R , Dichte ρ
 - ▶ Massenträgheitsmoment um z-Achse

$$r^2 = R^2 - z^2$$

$$dJ_s = \frac{\pi}{2} \rho r^4 dz$$

$$J_s = \int dJ_s = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \pi \rho R^5$$

$$m = \rho V, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$J_s = \frac{2}{5} m R^2.$$

Kinetik der Rotation – Arbeit

- ▶ kinetische Energie

$$E_k = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} J \omega^2$$

- ▶ Arbeit W , Leistung P

$$dW = M d\varphi$$

$$W = \int M d\varphi$$

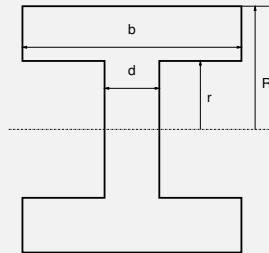
$$P = \frac{dW}{dt} = M \omega$$

Kinetik der Rotation – Übungen

- Gegeben ist eine rechteckige Platte (Länge a , Breite b , Dicke d , Dichte ρ). Bestimmen Sie die Massenträgheitsmomente :
 - um die Hauptachsen durch den Schwerpunkt;
 - um die Kanten a und b ;
 - um eine Achse, die parallel zur Mittensenkrechten durch eine Plattenecke verläuft.
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment eines Rohres (Außenradius R_a , Innenradius R_i , Länge l , Dichte ρ) um seine Achse!
- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment einer Hohlkugel (Außenradius R_a , Innenradius R_i , Dichte ρ)!

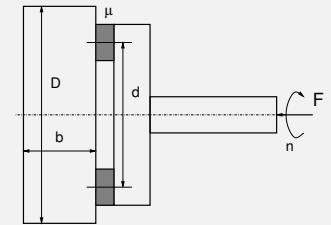
Kinetik der Rotation – Übungen

4. Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment eines Quaders (Kantenlängen a und b , Länge l , Dichte ρ) um seine Längsachse!
5. Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment eines Kegels (Radius R , Höhe h , Dichte ρ) um seine Achse!
6. Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment eines Schwungrades (Innenradius r , Außenradius R , Radscheibenstärke d , Radbreite b , Dichte ρ) um seine Achse!



Kinetik der Rotation – Übungen

7. Gegeben sei ein Rotationskörper (Massenträgheitsmoment J_s).
 - a) Welche Arbeit W wird verrichtet, wenn der Körper aus dem Stillstand auf die Drehzahl n gebracht wird?
 - b) Welche mittlere Leistung wird erbracht, wenn das Beschleunigen des Körpers in einer Zeit T erfolgt?
8. Ein massives Schwungrad (Durchmesser D , Breite b , Dichte ρ) wird über eine Reibkupplung (Reibbeiwert μ) mit der Drehzahl n angetrieben (Reibdurchmesser d). Die Kupplung wird mit der Kraft F an das Schwungrad gepresst.
 - a) Wie groß ist das Reibmoment?
 - b) Wie lange dauert das Einkuppeln des stehenden Schwungrades?
 - c) Welche kinetische Energie nimmt das Schwungrad auf?
 - d) Welche Arbeit verrichtet der Antrieb während des Einkuppelns?

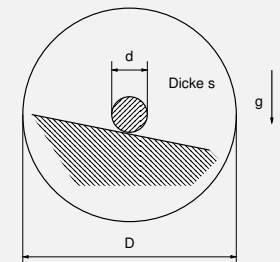


Kinetik der Rotation – Übungen

9. Eine Person (Massenträgheitsmoment $J = 1 \text{ kg m}^2$) steht mittig auf einer Scheibe, die frei mit $n = 100 \text{ 1/min}$ rotiert. Die Person hält verschiedene Gegenstände in den Händen:
 - a) Die Person hält im Achsabstand von $d = 0,5 \text{ m}$ ein Rad (Masse $m = 5 \text{ kg}$) in den Händen, das sich mit $z = 300 \text{ 1/min}$ um die gleiche Achse dreht wie die Person. Diese dreht die Radachse nun abwärts, bis es sich in die Gegenrichtung dreht. Mit welcher Drehzahl rotiert die Person jetzt?
 - b) Die Person hält in den ausgebreiteten Armen im Achsabstand $R = 0,8 \text{ m}$ je ein Gewicht der Masse $M = 5 \text{ kg}$. Nun zieht die Person die Massen bis auf einen Achsabstand $r = 0,25 \text{ m}$ an den Körper. Mit welcher Drehzahl rotiert die Person jetzt?

Kinetik der Rotation – Übungen

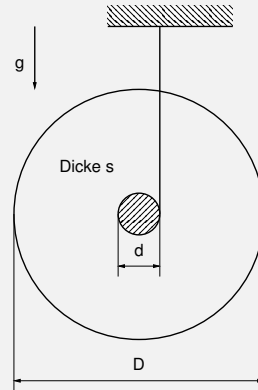
10. Ein massives Rad (Durchmesser $D = 200 \text{ mm}$, Dicke $s = 20 \text{ mm}$, Dichte $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$) rollt auf seiner Achse (Durchmesser $d = 15 \text{ mm}$) im Erdschwerefeld $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ eine um 12° geneigte Ebene hinab.
 - a) Nach welcher Zeit erreicht das Rad eine Drehzahl von $1/\text{min}$?
 - b) Welchen Weg hat es bis dahin längs der Ebene zurückgelegt?
 - c) Wie groß ist nun seine kinetische Energie?



Kinetik der Rotation – Übungen

11. Ein massives Rad (Durchmesser $D = 200$ mm, Dicke $s = 20$ mm, Dichte $\rho = 800$ kg/m³) hängt mit seiner Achse (Durchmesser $d = 15$ mm) an Fäden im Erdschwerefeld $g = 9,81$ m/s². Nun wird das Rad los gelassen.

- Nach welcher Zeit erreicht das Rad eine Drehzahl von 3/min?
- Welchen Weg hat es bis dahin zurückgelegt?
- Wie groß ist nun seine kinetische Energie?



Schwingungen– Grundbegriffe

- Bewegungsform

$$x = x(t)$$

- Periode T

$$x(t + T) = x(t)$$

- Frequenz f und Kreisfrequenz ω

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- harmonische Schwingung mit

- Sinus- und Kosinusanteilen, Amplituden A und B

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

- Amplitude C und Phase α

$$x(t) = C \cos(\omega t - \alpha) \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \alpha = \arctan \frac{B}{A}$$

Federschwingung

$$F = -c x = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + c x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

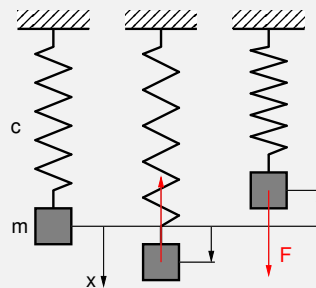
$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

$$\Rightarrow A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = C \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{v_0}{\omega x_0}$$



Mathematisches Pendel

$$x = l \varphi$$

$$\dot{x} = l \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = l \ddot{\varphi}$$

$$m \ddot{x} = m l \ddot{\varphi} = -m g l \sin \varphi$$

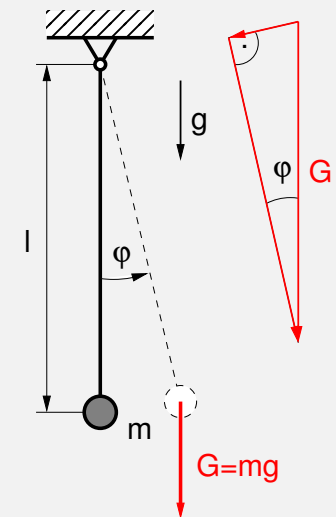
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

kleine Winkel:

$$\varphi \ll \pi \Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$$

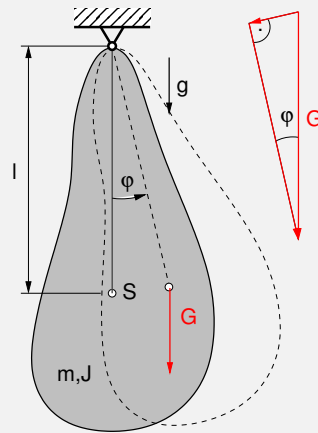
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



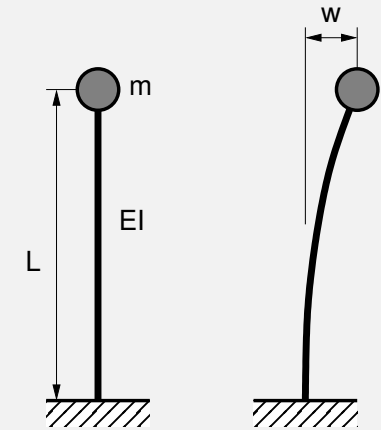
Physikalisches Pendel

$$\begin{aligned} \dot{L} &= M \\ J\ddot{\varphi} &= -mgl \sin \varphi \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \sin \varphi &= 0 \\ \text{kleine Winkel:} \\ \varphi \ll \pi &\Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi \\ \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \varphi &= 0 \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J}} \\ I_{red} &= \frac{J}{ml} \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{g}{I_{red}}} \end{aligned}$$



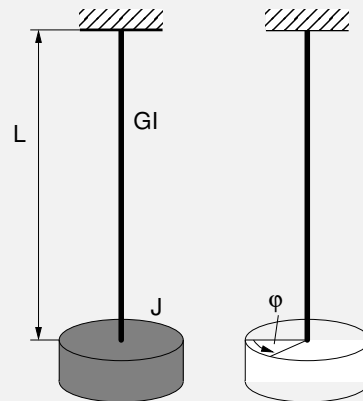
Balkenschwinger

$$\begin{aligned} c &= \frac{F}{w} \\ w &= \frac{FL^3}{3EI} \\ \Rightarrow c &= \frac{3EI}{L^3} \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{c}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \end{aligned}$$



Torsionsschwinger

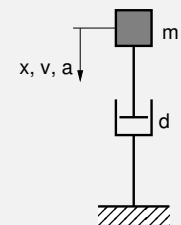
$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{ML}{GI} \\ c_T &= \frac{M}{\varphi} = \frac{GI}{L} \\ J\ddot{\varphi} &= M \\ &= -c_T \varphi \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{c_T}{J} \varphi &= 0 \\ \Rightarrow \omega &= \frac{GI}{JL} \end{aligned}$$



Dämpfung

- ▶ trockene Reibung: Berechnung oft ungenau
- ▶ viskose Dämpfung (technisch verbreitet):
 - ▶ Dämpfungskonstante d
 - ▶ Dämpfungskraft $F_d = d v$
 - ▶ Abklingkoeffizient $\delta = \frac{2}{2m}$
 - ▶ Dämpfungsgrad $D = \frac{\delta}{\omega}$
 - ▶ Logarithmisches Dekrement $\Lambda = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}$
- ▶ Luftwiderstand:

$$F_w = \frac{\rho}{2} c_w A v^2$$



Schwingungen bei viskoser Dämpfung

$$m\ddot{x} = -cx - d\dot{x}$$

$$2\delta = \frac{d}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ansatz:

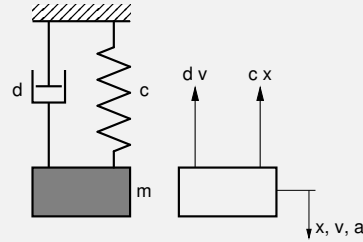
$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega\sqrt{D^2 - 1}$$



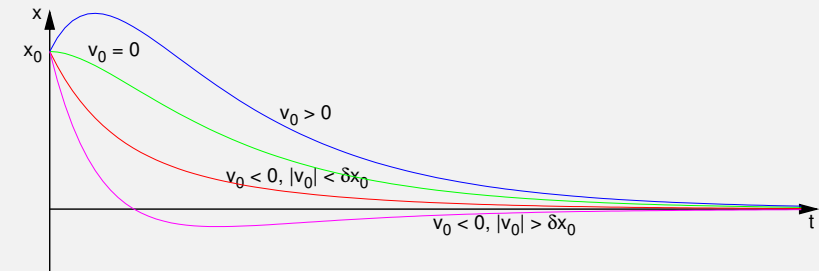
Gedämpfte Schwingungen – starke Dämpfung

$$D > 1$$

$$\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= e^{-\delta t}(A_1 e^{\mu t} + A_2 e^{-\mu t})$$



Gedämpfte Schwingungen – aperiodischer Grenzfall

$$D = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$$

$$\Rightarrow x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$$

$$\delta = \omega$$

$$d = 2\sqrt{mc}$$

Gedämpfte Schwingungen – schwache Dämpfung

$$D < 1$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega\sqrt{1 - D^2}$$

$$= -\delta \pm i\omega_d$$

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - D^2}$$

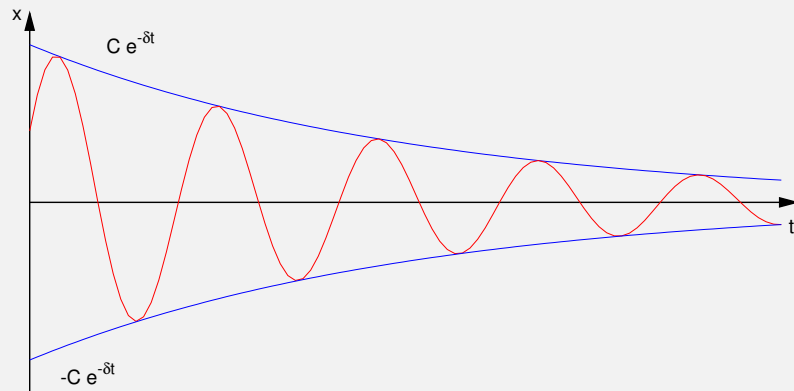
$$\Rightarrow x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= e^{-\delta t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

$$e^{\pm i\omega_d t} = \cos \omega_d t \pm i \sin \omega_d t$$

Gedämpfte Schwingungen – schwache Dämpfung

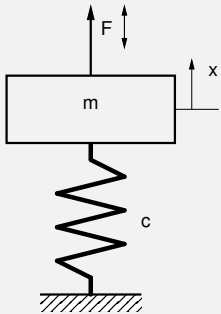
$$\begin{aligned}\Rightarrow x(t) &= e^{-\delta t}(A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \\ &= C e^{-\delta t}(\cos \omega_d t - \alpha)\end{aligned}$$



Gedämpfte Schwingungen – schwache Dämpfung

$$\begin{aligned}x(t) &= C e^{-\delta t}(\cos \omega_d t - \alpha) \\ x(t + T_d) &= C e^{-\delta(t+T_d)}(\cos \omega_d(t + T_d) - \alpha), \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \\ &= C e^{-\delta(t+T_d)}(\cos \omega_d t - \alpha) \\ \Rightarrow \frac{x(t)}{x(t + T_d)} &= e^{\delta T_d} \\ \Lambda &= \ln \frac{x(t)}{x(t + T_d)} \\ &= \delta T_d = \frac{2\pi \delta}{\omega_d} \\ &= 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}\end{aligned}$$

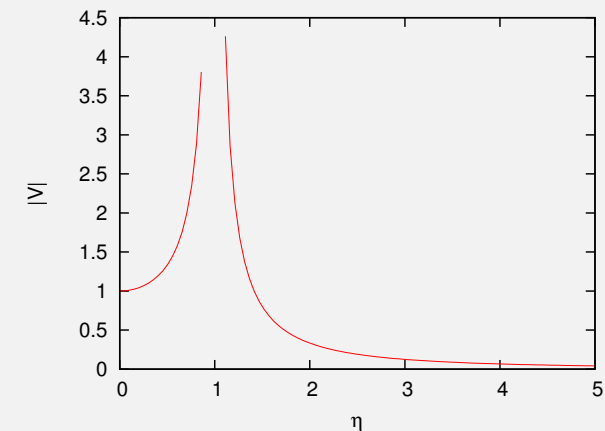
Krafterregte Schwingung



$$\begin{aligned}m \ddot{x} &= -c x + F \\ F &= F_0 \cos \Omega t \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= \omega^2 x_0 \cos \Omega t \\ \omega^2 &= \frac{c}{m} \\ x_0 &= \frac{F_0}{c} \\ x &= x_h + x_p \\ x_h &= C \cos(\omega t - \alpha) \\ x_p &= x_0 V \cos \Omega t \\ -x_0 V \Omega^2 \cos \Omega t + \omega^2 x_0 V \cos \Omega t &= \omega^2 x_0 \cos \Omega t \\ \Rightarrow V &= \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \\ &= \frac{1}{1 - \eta^2}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega}\end{aligned}$$

Krafterregte Schwingung – Resonanz

- ▶ Verstärkungsfunktion V



- ▶ Resonanz: $\lim_{\eta \rightarrow 1} |V| = \infty$

Schwingungen – Übungen

1. Gegeben sei eine Masse ($m = 5 \text{ kg}$), die an einer Feder ($c = 2 \text{ N/mm}^2$) frei, aber gedämpft schwingen kann.
- Wie groß ist die Kreisfrequenz ω der ungedämpften Schwingung?
 - Wie groß ist die Dämpfungskonstante d im aperiodischen Grenzfall?
 - Sei bei $t = 0$ die Anfangsauslenkung $x(0) = 25 \text{ mm}$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 75 \text{ mm/s}$. Bestimmen Sie den Bewegungsverlauf für
 - die ungedämpfte Schwingung,
 - den aperiodischen Grenzfall,
 - die schwach gedämpfte Schwingung mit halber Dämpfungskonstante,
 - die stark gedämpfte Schwingung mit doppelter Dämpfungskonstante!
 Stellen Sie die Bewegungsverläufe grafisch dar!

Schwingungen – Übungen

2. Gegeben sei ein mathematisches Pendel ($L = 2 \text{ m}$, $m = 5 \text{ kg}$).
- Wie hoch ist die Erdbeschleunigung, wenn eine Periodendauer von $T = 2,830$ Sekunden ermittelt wird?
 - Die Masse sei kugelförmig und habe einen Durchmesser von $D = 100 \text{ mm}$. Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung unter Berücksichtigung der Luftreibung ($c_w = 0,4$) auf!
3. Aus der Bewegungsmessung einer Bewegung wird die Dauer von einem Nulldurchgang bis zum nächsten gleichsinnigen Nulldurchgang zu $0,8$ Sekunden bestimmt. Das logarithmische Dekrement beträgt 75% .
- Wie groß ist der Dämpfungsgrad der Schwingung?
 - Wie groß ist die Kreisfrequenz der Schwingung?
 - Wie groß wäre die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung?

Schwingungen – Übungen

4. An einer Welle aus Stahl (Durchmesser $D = 20 \text{ mm}$, Länge $L = 2,5 \text{ m}$) wird ein Mixer betrieben, der in eine Flüssigkeit eintaucht. Zur Bestimmung der Trägheit des Mixers kann dieser näherungsweise mit einer runden Stahlscheibe (Durchmesser $D_s = 500 \text{ mm}$, Stärke $b = 20 \text{ mm}$) verglichen werden.
- Wie groß ist die Rotationsträgheit des Mixers?
 - Wie groß ist die Drehsteifigkeit der Welle?
 - Mit welcher Frequenz kann der Mixer an der Welle frei schwingen?
 - Mit welcher Frequenz kann der Mixer schwingen, wenn seine Bewegung in der Flüssigkeit gedämpft wird? Das Dämpfungsmoment ist dabei $M_d = d \omega$ mit $d = 5 \text{ Nms}$.

Schwingungen – Übungen

5. Gegeben ist ein physikalisches Pendel mit der Massenträgheit $J = 10 \text{ kgm}^2$ bezüglich des Schwerpunktes. Das Pendel ist im Abstand von $s = 0,5 \text{ m}$ vom Schwerpunkt aufgehängt. Es kann Kleinwinkelnäherung und Reibungsfreiheit angenommen werden.
- Mit welcher Periodendauer schwingt das Pendel im Erdschwerefeld ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)?
 - Mit welcher Frequenz schwingt das Pendel, wenn es im Abstand von $d = 5 \text{ m}$ vom Schwerpunkt aufgehängt wird?

Schwingungen – Übungen

6. Eine Masse $m = 5 \text{ kg}$, die an einer Feder der Steifigkeit $c = 10 \text{ N/mm}$ schwingen kann, wird harmonisch mit der Kraft $F = F_0 \cos \Omega t$ erregt ($F_0 = 2 \text{ N}$).
- Bei welcher Anregungsfrequenz besteht das Risiko der Resonanzkatastrophe?
 - Wie groß ist bei der halben beziehungsweise der doppelten Frequenz die Verstärkung? Welche Kräfte wirken dann maximal auf die Masse?